# Не вошло в вопросы

## 1 Показатели эффективности СМО

Важенйшими показателями эффективности СМО являются абсолютная и относительная пропускная способность.

**Абсолютной пропускной способностью** СМО назовем среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

**Относительная пропускная способность** - это средняя доля поступивших заявок, обслуживаемая системой, т.е. это отношение среднего числа заявок, которое может обслужить система за единицу времени к среднему числу заявок, поступивших в систему за это время.

Кроме того, важжную роль в оценке СМО играют следующие показатели:

1. Среднее число заявок в очереди

2. Среднее число обслуживаемых заявок

3. Среднее время ожидания в очереди

4. Среднее время обслуживания

### 1.1 Расчет показателей одноканальной СМО с отказами

Таблица 1. Показатели эффективности одноканальной СМО с отказами.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Термин | Обозначение |
|  | Интенсивность входящего потока |  |
|  | Интенсивность выходящего потока |  |
|  | Приведенная интенсивность потока заявок |  |
|  | Среднее время обслуживания заявки |  |
|  | Относительная пропускная способность |  |
|  | Абсолютная пропускная способность |  |
|  | Вероятность того, что заявка обслужена |  |
|  | Вероятность отказа |  |

Траектория пуассоновского процесса





**Постановка задачи:** пусть задана СМО, т.е. заданы  и  (одноканальная система с отказом). Требуется найти 

Формулы для рассчета













### 1.2 Таблица для многоканальной системы

Таблица 2. Показатели эффективности многоканальной СМО с отказами.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Термин | Обозначение |
|  | Интенсивность входящего потока |  |
|  | Интенсивность выходящего потока |  |
|  | Приведенная интенсивность потока заявок |  |
|  | Число каналов обслуживания |  |
|  | Вероятность того, что занято 0,1,...,n каналов |  |
|  | Относительная пропускная способность |  |
|  | Абсолютная пропускная способность | A |
|  | Вероятность того, что заявка обслужена |  |
|  | Вероятность отказа |  |
|  | Среднее число занятых каналов |  |

Параметры  такие же как в таблице 1.

Основные объекты, которые нас будут интересовать:

Вероятность ,  вычисляются по формулам Эрланга: , ,









**Пример 1:** на вход многоканальной СМО поступает поток заявок с интенсивностью 11 заявок/час. Среднее время обслуживания заявки 0,15 часа. Каждая заявка приносит доход 130 рублей, а содержание одного канала обходится 122 р/час. Найти оптимальное число каналов СМО.

**Решение:**

, заявок/час. . Заметим, что если система имеет , то доходность 

Для того, чтобы найти A, нужно определить 

Пусть 



D=130A-122=421,4 руб/час.

Посчитать дома сами???

Пусть 

Продолжим это в следующий раз

**Решено**

**16.02.17 законспектировать**

**02.03.17 лекция**

## 2 Марковские системы массового обслуживания

Первая система, которую мы рассмотрим: M|

Рассмотрим СМО вида , где M означает, что входящий поток имеет пуассоновское распределение с параметром ,  означает, что время обслуживания  имеет Эрланговское распределение с параметрами  и , т.е.  и .

Рассматриваемая СМО имеет 1 канал и бесконечный накопитель (можно сказать, что она не имеет отказов).

Пусть  - число заявок в системе (отличается от числа заявок в очереди на 1). Будет ли динамика система Марковской? Для того, чтобы понять это, нам понадобится новый объект:  - **число фаз**, которое осталась обслужить для заявки, находящейся на обслуживании.

Процесс  не является марковским, однако процесс  уже является марковским.

Пространство состояний этой системы процесса  имеет вид 

 соответствует пустой системе.  - число заявок в системе.  - число фаз, оставшисях для обслуживания.

Определим переходные вероятности процесса  за время .

1. Из состояния  можно перейти в состояние  (m означет число фаз, которые осталось обслужить) с вероятностью  (поступила заявка и начато обслуживание)

2. Из состояния  можно перейти в состояние  с вероятностью  (продолжается обслуживание заявки, но в систему поступила новая заявка) или в состояние   (окончилось обслуживание на -й фазе, осталась  фаза обслуживания)

3. Из состояния  можно перейти в состояние  с вероятностью  или  с вероятносью 

Пусть .



Сразу запишем дифференциальные уравнения. Распределения  и  следующей системе ОДУ.

 - вероятность того, что система осталась пустой. Доказывается как в прошлом семестре.





, 



Система (2.1)

Рассмотрим уравнения, которым подчиняются . При этом величины  удовлетворяющие системе алгебраической соотношений (2), которая получается из (1) при  (заменяем все производные нулями в (2.1))

Графы, соответствующие балансовым соотношениям (2) имеют вид (картинка в отдельном файле).

При этом в состоянии  суммарный поток вероятностей устроен так, что выходящий поток  и входящий поток  в сумме дают ноль.

Рассмотрим подмножество пространства  состоящее из  и  . При этом мы получаем с учетом принципа локального баланса, что граф рассматриваемой системы имеет вид (в том же файле).

Анализируя систему (2), мы получаем соотношение



Где символ  обозначет суммирование по всем значениям соответствующего дискретного аргумента.

**30.03.17** **лекция**

СМО - обслуживание многофазовое. Не смотря на то, что в каждой фазе обслуживание по экспоненциальному закону с постоянным показателем, закон обслуживания оказывается Эрланговским.

Это некие системы типа сложной Марковской цепи. Мы хотели бы вывести уравнение Колмогорова. Это будет система ОДУ. Ищем стационарное решение. Мы верим в то, что это эргодическая. На больших временах становится устойчивой. Вместо системы ОДУ возникает некая система алгебраических уравнений. Так или иначе, система сводится к виду, пригодному для исследования.

Нас интересуют следующие вопросы: среднее число заявок, среднее число заявок в очереди и некие временные параметры.

Текущая система: пуассоновский входящий поток, вторая буква уже не M, а  - закон Эрланга.

Какое среднее время заявки должны провести в очереди/системе?

Нужны функции распределения. Функция распределения суммы экспоненциальных распределений случайных величин.

- как найти преобразование Лапласа для этой функции:  - перемножение - сложение показателей. 

Когда возникает Эрланговское распределение, то суммируются показатели преобразования 

 - будем интегрировать по частям, убирая показатель экспоненты до тех пор, пока не дойдем до экспоненты.

 - время ожидания (время, проведенное в очереди). Преобразование Лапласа для него. .









Стационарное распределение  времени пребывания заявки в системе имеет преобразование Лапаласа вида 



Функция распределения  и ее функция Лапласа, то 

Продиффиренцируем левую часть 

.

Мы получили то, что называется формулами Лиддла.

Далее найти среднее время, проведенное заявкой в системе 

Как решать системы ОДУ? M||1|.

Что такое производящая функция: .

Нестационарные характеристики.



Возвращаясь к системе ОДУ (2.1) и умножая -е уравнение этой системы на  с последующим суммированием, мы получим ОДУ для функции  уравнение которое имеет вид, , 

.

Это уже не бесконечная система уравнений.

Решая полученную сстему с помощью преобразований Лапласа, вводя обозначения , 

, .

, где 

 - совпали. Вероятность того, что система пуста

Мы взяли систему, у которой входящий поток был Пуассоновский, очередь бесконечна. Сумели найти более-менее явные выражения. Все остальное посчитает компьютер, ему нужно будет лишь решать СЛАУ.

## 3 Система с повторными заявками

Система с повторяющимися заявками - однокнальная, без накопителя и экспоненциальным временем обслуживания.

Предположим, что заявка, получившая отказ, повторяет попытку войти в систему. Возникает поток повторных заявок.

Повторная заявка не может попасть на обслуживание сразу после того, как обслуживающее устройство освободилось. Она может попасть на обслуживание, если произведет повторную попытку, т.е. через случайное время  распределенное по экспоненциальному закону с параметром . Заявка может уйти с вероятностью .

### 3.1 Распределение потока повторных заявок в системе

Пусть  - число повторных заявок. Обозначим  величину вида

Пусть  - это марковский процесс с пространством состояний вида 

Описать марковскую цепь - описать множество ее состояний и вероятности перехода из одного состояния в другое.

Опишем переходные вероятности процесса .

**Пункт 1**: Из состояния  (поступление новой заявки и начало обслуживания) с интенсивностью  и в состояние  с интенсивностью  (произвела удачную повторную попытку одна из  заявок).

**Пункт 2**:  за время  система может перейти в состояние  с интенсивностью  (окончено обслуживание заявки) и с итенсивностью  система перейдет в состояние  (поступила новая заявка и застала прибор занятым, однако с вероятностью  эта новая заявка осталась в системе) и в состояние  с вероятностью  (одна из повторных заявок произвела новую попытку неудачно и ушла из системы)

**13.04.17 лекция**

То, чем мы занимаемся на практике - лучше мы это сделали на компьютерах. Для этого нужен компьютерный класс. Где его найти?..u

Система с повторными заявками. Простой случай M|M|1|0. Если заявка застает занятую систему, то уходит. Но "ушедшая" заявка имеет несколько возможностей: вернуться.

Число повторных заявок, которые могут вернуться в систему и состояние системы. Процесс .

Как задать Марковскую цепь?

 - пространство состояний

 - приходит заявка и застает свободную систему. Ее сразу обслуживают, т.е. . Либо 

Вероятности соответственно 

и  где  - случайное время, когда процесс может повторить попытку,  - время, прошедшее до попытки дозвониться,  - его параметр. Типичная модель для телефонной станции.

 можем перейти в состояние  - .  - во первых пришла новая заявка, но она застала систему занятой, а предыдущая не передумала уходить, т.е. .

Теперь нужно описать вероятности перехода из одного состояния в другое если известны эти интенсивности.

Пусть  - вероятность того, что в системе  повторных заявок (повторов) и прибор свободен. 

Рассмотрим систему уравнений Колможгорова для СМО с повторами заявок.





Последнее слагаемое - завка подождала и решила уйти.

Предпоследнее - азявка с интенсинвостью  решила повториться.

Возможности изменение  мы исчерпали. Что будет для других ?



Вся эта система - **(7.1)**

Система была в  - это может произойти из-за того, что заявка подождала, махнула рукой и ушла, а прибор в это время работает.

Одна из  заявок решила повторить свою попытку, ждала время , перешли.

Новая заявка пополнила систему.

Пришла новая заявка, решила не оставлять систему и возникла структура.

Что мы дальше делаем.

Решать сложно, найдем стационарное решение. Приравниваем производные к нулю.

Стационарное распределение числа заявок.

Рассмотрим систему



**(7.2) - система глобального баланса**

Суммарный поток вероятности  выхода из состояния  образуется за счет поступления на прибор либо новой заявки либо одной из повторных заявок, а попасть в это состояние можно после завершени обслуживания. Равенство этих потоков - это первое уравнение в системе .

Из состояния  можно выйти (причем суммарный поток вероятности выхода ) за счет поступления заявки, заставшей прибор занятым и ставшей с вероятностью  повторным либо после того, как завершено обслуживание на приборе, а попасть в это состояние можно при поступлении заявки в свободную систему (поток вероятности ) либо при удачном завершении попытки единственной повторной заявки (с вероятностью ) или при неудачной попытке повторной заявки (с вероятностью ).

Для того, чтобы решить (7.2), просуммируем первое соотношение в системе от  до , а третье от  до  и сложим полученные соотношения.

При этом, мы получим гораздо более простые связи

 **** **(7.3),**

Выражая  через  и подставляя во второе слагаемое в (7.3) полуим , из этих формул следует

 где , . Все эти формулы - **(7.4)**.  - величина, обратная ропускной способности. Т.к.  не равна нулю, то возникают соотношения.

**27.04.17 лекция**

Работаем с Марковскими цепями. Цепь - потому что дискретное множество состояний. Входящий поток - Макровская цепь. Пуассоновский поток является цепью.

Какие еще есть цепи. Число заявок в системе, число заявок в очереди. Эти процессы принимают дискретные значения, но время непрерывное. Все, что связано с задачами, есть в мудле.

Продолжаем рассматривать системы с отказами (т.е. последняя цифра в классификации Кенделла - 0).

Первый поток - новые заявки, второй - ушедшие заявки. Заявки возвращаются с некоей вероятностью. Нужно описывать двухкомпонентным потоком но все равно это будет марковская цепь.

Для того, чтобы описать цепь, нужно задать пространство состояний (оно дискретно, но может иметь сложную структуру) и определить - как выполняется переход из одной системы в другую.

Есть прямые уравнения Колмогорова для этой системы. Сначала рассмотрим стационарное решение.

Не хватает  и  -нужно просуммировать все слагаемые от 0 до , и выразим  из этой формулы.

 находим из условий нормировки . . Таким образом,  **(7.5)**. Если , то (7.5) сходится при всех , а если , то сходимость имеет место при .

Таким образом, были получены некоторые ряды и рассмотрена их сходимость. но для работы с системой нужны конкретные числа.

Альтернативный способ нахождения хаарктеристик СМО M|M|1|0 с повторными заявками состоит в отыскании производящей функции  - две производящие функии.

Умножая -е уравнение в (7.3) для  на  получим:

,

+ **(7.6) - система**.

При  мы получаем соотношение: ,  **(7.7)**

откуда следует соотношение , где . линейное однородное уравнение. Решение этого уравнения имеет вид:  где C - постоянная, которую потом нужно будет найти, и в силу (7.7) 

Таким образом,  удовлетворяет соотношениям . Постоянная  вычисляется из условий нормировки , т.е. .

Дифференцируя выражения для  и вычисяляя производную при , получим, что , где  обозначает, что  раз продифференцировали.



Стационарное среднее число  повторных заявок 

Стационарная вероятность того, что поступившая в систему заявка будет обслужена с первой попытки 

Многим вещам приходится верить на слово, если их подставить, то они будут работать.

Если заложить эти формулы в программы, то программы все посчитают.

## 4 Нестационарные характерстики СМО с повторными заявками

Будем полагать  (все заявки повторяют попытки). При этом будем пользоваться производящей функцией.

.

Из системы (7.1) следует 



Применяя преобразование Лапласа





Преобразование Лапласа от производной: 

 **(\*)**

где , 

Выражая  через  и подставляя во второе соотношение (\*), получим  **(7.8)**

Получили неоднородное ОДУ, но с переменными коэффициентами. С одной стороны, мы занем как его решать.

Дальше возникают дроби - когда эти дроби будут конечными, не обратятся ли в бесконечность и т.д.

Осталось лишь исследовать эти выражения. После этого, мы досчитаем все характеристики системы. Это будет конец курса.

Разбор этой структуры довольно громоздкий.

Полученное выражение таково, что оно мало что говорит сразу для того, чтобы понимать - что с ним делать. Оно имеет вид дроби. Это долго, поставим на этом точку. Все равно, она не входит в экзамен :)

### 5 Условные вероятности и условные математические ожидания



Условная вероятность 

**Условные математические ожидания:**





Условное математическое ожидание – математическое ожидание относительно условной вероятности.

Т.е.  , тогда 

Если бы было только 3 грани на кубике (всегда выпадает четное), то , условное среднее даст нам среднее с учетом того ,что вероятности теперь 

## 6 6. Случайные процессы и их числовые характеристики

**Потоки сигма-алгебр**

последовательность вложенных сигма-алгебр , называется **потоком**.

**Случайные процессы**

  - Порожден поток,  - **случайный процесс**.

**Главный пример** – пуассоновский процесс:





???Гиперэкспоненциальное, Эрланговское, 

Здесь память можно не напрягать. Можем просто написать 

Можем посчитать до конца если  - четное и через гамма-функцию, если  - нечетное.